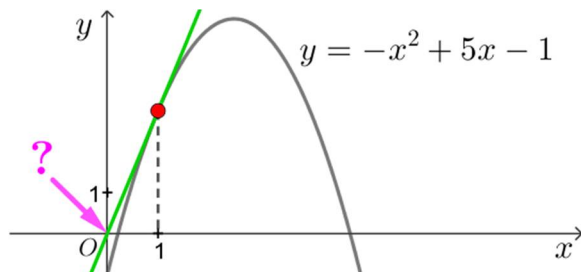


Défis 1^{ère} Spé maths : dérivation – Thiaude P.

Défi Dérivation 01 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 5x - 1$.

La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathcal{C}_f$ passe-t-elle par l'origine du repère ?



Corrigé

Pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(1+h) &= -(1+h)^2 + 5(1+h) - 1 \\ &= -1 - 2h - h^2 + 5 + 5h - 1 \\ &= -h^2 + 3h + 3 \end{aligned}$$

d'autre part :

$$f(1) = -(1)^2 + 5(1) - 1 = -1 + 5 - 1 = 3$$

Donc, pour tout $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{-h^2 + 3h + 3 - 3}{h} \\ &= \frac{-h^2 + 3h}{h} \\ &= \frac{h(-h + 3)}{h} \\ &= -h + 3 \end{aligned}$$

On a :

$$f'(1) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h + 3) = 3$$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

La tangente au point d'abscisse 1 admet pour équation :

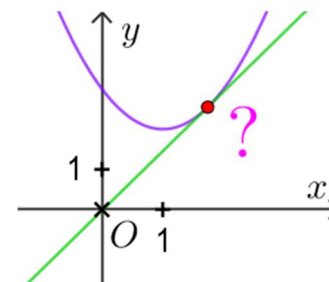
$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ y &= 3(x - 1) + 3 \\ y &= 3x - 3 + 3 \\ y &= 3x \end{aligned}$$

L'ordonnée à l'origine de cette droite est nulle donc cette tangente passe par l'origine du repère.

Conclusion

La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathcal{C}_f$ **passe** par l'origine du repère.

Défi Dérivation 02 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$: en quel(s) point(s) de $\mathcal{C}_f$ la tangente passet-elle par l'origine du repère ?



Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$ donc $f'(x) = 2x - 2$.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a admet pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x - a) + f(a) \\ y &= f'(a)x - af'(a) + f(a) \end{aligned}$$

donc elle passe par l'origine du repère si et seulement si son ordonnée à l'origine $-af'(a) + f(a)$ est nulle.

Or, avec les notations de l'exercice on a les équivalences :

$$\begin{aligned} -af'(a) + f(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow -a(2a - 2) + a^2 - 2a + 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -2a^2 + 2a + a^2 - 2a + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow -a^2 + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow 3 - a^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{3})^2 - a^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{3} + a)(\sqrt{3} - a) = 0 \\
&\Leftrightarrow a = -\sqrt{3} \text{ ou } a = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

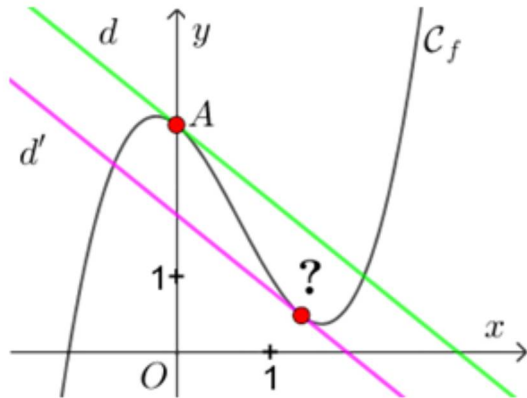
On a :

$$f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^2 - 2(-\sqrt{3}) + 3 = 3 + 2\sqrt{3} + 3 = 6 + 2\sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{3}) + 3 = 3 - 2\sqrt{3} + 3 = 6 - 2\sqrt{3}$$

Il y a deux points en lesquels la tangente passe par l'origine du repère : $A(-\sqrt{3}; 6 + 2\sqrt{3})$ et $B(\sqrt{3}; 6 - 2\sqrt{3})$.

Défi Dérivation 03 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$, on note A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse nulle et d la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A . Déterminer les coordonnées du point de $\mathcal{C}_f$ distinct de A en lequel la tangente d' à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la tangente d .



Corrigé

Pour tout réel x , $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$.

f est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \times 2x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

On en déduit que $f'(0) = 3(0)^2 - 4(0) - 1 = -1$: la tangente d a donc pour coefficient directeur (-1) .

On sait que $d' \parallel d$ et que le coefficient directeur de d est (-1) . donc le coefficient directeur de d' est aussi (-1) .

Il s'agit donc de déterminer $x_B \neq 0$ ($x_A = 0$) tel que $f'(x_B) = -1$, x_B est donc la solution non nulle de l'équation $f'(x) = -1$.

On a les équivalences :

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 1 = -1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{4}{3}$$

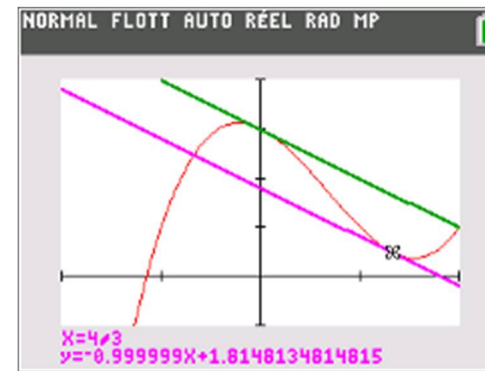
La solution non nulle de $f'(x) = -1$ est $\frac{4}{3}$ donc $x_B = \frac{4}{3}$.

$B \in \mathcal{C}_f$ donc $y_B = f(x_B)$, d'où :

$$y_B = f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{27}$$

Finalement :

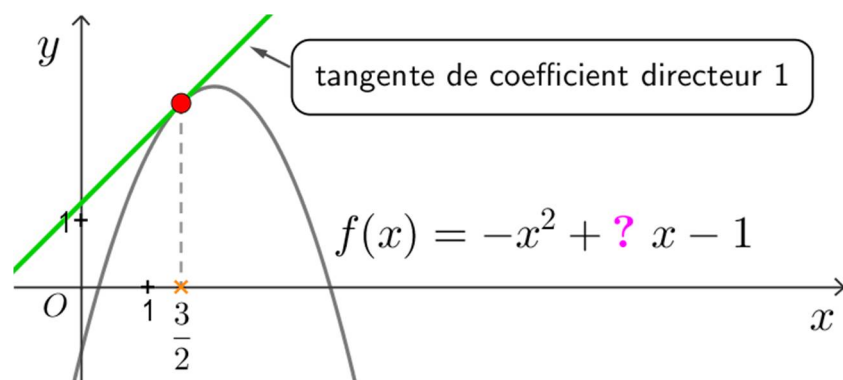
$$B\left(\frac{4}{3}; \frac{13}{27}\right)$$



Défi Dérivation 04

Pour tout réel x on pose : $f(x) = -x^2 + bx - 1$ où b est une constante provisoirement inconnue, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

On précise qu'au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ a pour coefficient directeur 1, déterminer b .



Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + bx - 1$ donc : $f'(x) = -2x + b$.

Au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ admet pour coefficient directeur 1 donc

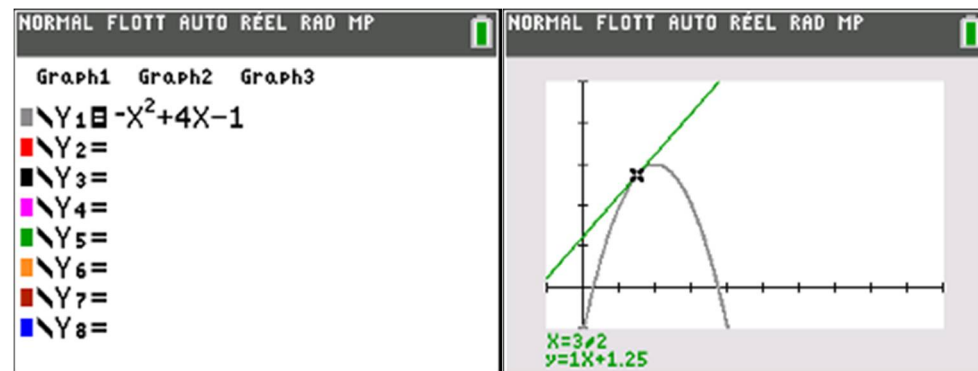
$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

On obtient donc :

$$-2\left(\frac{3}{2}\right) + b = 1 \Leftrightarrow -3 + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 + 3 \Leftrightarrow b = 4$$

Conclusion : $b = 4$.

Vérification

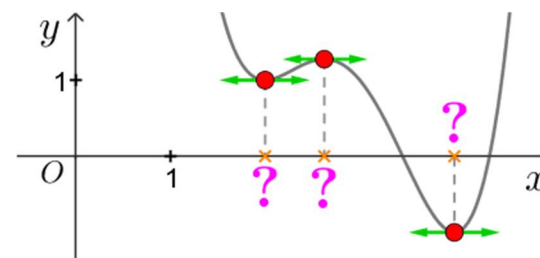


Défi Dérivation 05

Pour tout réel x on pose :

$$f(x) = (x-2)^2(x-3)\left(x-\frac{9}{2}\right) + 1$$

On munit le plan d'un repère orthogonal ; déterminer les abscisses des points en lesquels $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale :



Corrigé

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-2)^2(x-3)\left(x-\frac{9}{2}\right) + 1$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (x-2)^2 \times \left(x^2 - \frac{9}{2}x - 3x + \frac{27}{2}\right) + 1$$

$$f(x) = (x-2)^2 \times \left(x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{27}{2}\right)$$

Rappel

$$(u^2)' = 2u \times u' \text{ et } (u \times v)' = u' \times v + v' \times u$$

Donc :

$$f'(x) = 2(x-2)(1) \times \left(x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{27}{2}\right) + \left(2x - \frac{15}{2}\right)(x-2)^2 + 0$$

$$f'(x) = (x-2) \left(2 \left(x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{27}{2} \right) + \left(2x - \frac{15}{2} \right) (x-2) \right)$$

$$f'(x) = (x-2) (2x^2 - 15x + 27 + 2x^2 - 4x - \frac{15}{2}x + 15)$$

$$f'(x) = (x-2) \left(4x^2 - \frac{53}{2}x + 42 \right)$$

Il y a une tangente horizontale pour $\mathcal{C}_f$ lorsque $f'(x) = 0$

C'est-à-dire lorsque :

$$x - 2 = 0 \text{ ou } 4x^2 - \frac{53}{2}x + 42 = 0$$

- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

- $4x^2 - \frac{53}{2}x + 42$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 4$, $b = -\frac{53}{2}$ et $c = 42$,

de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{53}{2}\right)^2 - 4(4)(42) = \frac{121}{4} = \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\frac{53}{2} - \frac{11}{2}}{2(4)} = \frac{21}{8}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\frac{53}{2} + \frac{11}{2}}{2(4)} = \frac{32}{8} = 4$$

Conclusion

Il y a trois points exactement en lesquels la tangente est horizontale et ils ont respectivement pour abscisse : 2 , $\frac{21}{8}$ et 4 .

Vérification

1	$f(x) := (x-2)^2(x-3)(x-9/2)+1$ → $f(x) := (x-2)^2(x-3)\left(x-\frac{9}{2}\right)$
2	$f'(x)=0$ Résoudre: $\left\{ x = 2, x = \frac{21}{8}, x = 4 \right\}$

Défi Dérivation 06 On considère la fonction f définie pour $x \neq 2$ par :

$$f(x) = \frac{3x+4}{x-2}$$

Montrer que le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$, lorsqu'il existe, est égal à :

$$\frac{10}{h-1}$$

En déduire $f'(1)$. Retrouver $f'(1)$ à partir de $f'(x)$.

Corrigé

$$f(1+h) = \frac{3(1+h)+4}{1+h-2} = \frac{3+3h+4}{h-1} = \frac{3h+7}{h-1}$$

$$f(1) = \frac{3(1)+4}{1-2} = \frac{7}{-1} = -7$$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{3h+7}{h-1} - (-7)}{h} = \frac{\frac{3h+7}{h-1} + 7}{h}$$

$$= \frac{\frac{3h+7}{h-1} + \frac{7(h-1)}{h-1}}{h} = \frac{\frac{3h+7+7h-7}{h-1}}{h} = \frac{\frac{10h}{h-1}}{h} = \frac{10h}{h-1} \times \frac{1}{h}$$

$$= \frac{10h}{(h-1) \times h} =$$

Le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$ est bien égal à :

$$\frac{10}{h-1}$$

Par définition du nombre dérivé :

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10}{h-1} = \frac{10}{-1} = -10$$

Résumons : $f'(1) = -10$.

Autre méthode

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x+4}{x-2} \\ f'(x) &= \frac{3(x-2) - 1(3x+4)}{(x-2)^2} \\ f'(x) &= \frac{3x-6-3x-4}{(x-2)^2} \\ f'(x) &= \frac{-10}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

donc :

$$f'(1) = \frac{-10}{(1-2)^2} = \frac{-10}{(-1)^2} = \frac{-10}{1} = -10$$

On retrouve bien le résultat précédent.

Défi Dérivation 07 Pour tout réel x , on pose : $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal donné du plan et T la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.

1. Donner l'équation réduite de T .

2. Vérifier que, pour tout réel x , on a :

$$f(x) + 2x - 4 = (x^2 - 1)(x - 1)^2$$

3. En déduire que T coupe $\mathcal{C}$ en un point distinct de A , et en un seul, et déterminer les coordonnées de ce point.

Corrigé

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$.

$$\text{Donc : } f'(x) = 4x^3 - 2 \times 3x^2 + 0$$

c'est-à-dire : $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a admet pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ donc pour $a = 1$, on obtient : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

Or :

$$f'(1) = 4(1)^3 - 6(1)^2 = 4 - 6 = -2$$

$$f(1) = (1)^4 - 2(1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$$

On obtient donc : $y = -2(x - 1) + 2$ c'est-à-dire $y = -2x + 4$.

La tangente T admet pour équation réduite : $y = -2x + 4$.

2. **Vérifier que :** $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + 2x - 4 = (x^2 - 1)(x - 1)^2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a d'une part :

$$f(x) + 2x - 4 = x^4 - 2x^3 + 3 + 2x - 4 = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$$

et d'autre part on a :

$$(x^2 - 1)(x - 1)^2 = (x^2 - 1)(x^2 - 2x + 1)$$

$$= x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 + 2x - 1 = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$$

On constate que : $f(x) + 2x - 4 = (x^2 - 1)(x - 1)^2$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + 2x - 4 = (x^2 - 1)(x - 1)^2$.

3. **En déduire que T coupe $\mathcal{C}$ en un point distinct de A , et en un seul, et déterminer les coordonnées de ce point.**

Les abscisses des points communs à $\mathcal{C}$ et T : $y = -2x + 4$ sont les solutions de l'équation $f(x) = -2x + 4$.

Or, on a les équivalences :

$$f(x) = -2x + 4 \Leftrightarrow f(x) + 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \text{ ou } (x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ ou } x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

Or, $x_A = 1$ donc l'abscisse du point cherché est -1 .

D'autre part :

$$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 + 3 = 1 - 2(-1) + 3 = 6$$

Finalement : le point cherché a pour coordonnées $(-1; 6)$.

Défi Dérivation 08

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$.

Déterminer b et c sachant que la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 3 admet pour équation réduite $y = 4x - 7$.

Corrigé

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c.$$

Les formules de dérivation donnent :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2x + b = x + b$$

Or, $f'(3) = \text{coefficient directeur de } T = 4$

donc : $3 + b = 4$, autrement dit : $b = 1$.

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + c$

on sait de plus que $\mathcal{C}_f$ et T ont (au moins) A en commun, donc :

$f(x_A) = y_A = 4x_A - 7$. Or, on a :

$$f(x_A) = f(3) = \frac{1}{2}(3)^2 + 3 + c = \frac{15}{2} + c$$

donc :

$$\frac{15}{2} + c = 5 \Leftrightarrow c = \frac{10}{2} - \frac{15}{2} \Leftrightarrow c = -\frac{5}{2}$$

Conclusion

Pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{5}{2}$$

Défi Dérivation 09 Pour tout réel x , on pose : $f(x) = x^3 + 5x$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, en revenant à la définition du nombre dérivé déterminer $f'(a)$.
2. Vérifier en calculant, puis en utilisant, $f'(x)$.

Corrigé

Pour tout réel x , on pose : $f(x) = x^3 + 5x$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, en revenant à la définition du nombre dérivé déterminer $f'(a)$.

Par définition on a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Or, pour tout $h \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (a+h)^3 + 5(a+h) \\ &= (a+h)(a+h)^2 + 5a + 5h \\ &= (a+h)(a^2 + 2ah + h^2) + 5a + 5h \\ &= a^3 + 2a^2h + ah^2 + a^2h + 2ah^2 + h^3 + 5a + 5h \\ &= a^3 + 5a + h(3a^2 + 5) + 3ah^2 + h^3 \end{aligned}$$

et $f(a) = a^3 + 5a$, donc :

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= a^3 + 5a + h(3a^2 + 5) + 3ah^2 + h^3 - (a^3 + 5a) \\ &= h(3a^2 + 5) + 3ah^2 + h^3 \\ &= h(3a^2 + 5 + 3ah + h^2) \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{h(3a^2 + 5 + 3ah + h^2)}{h} \\ &= \frac{h(3a^2 + 5 + 3ah + h^2)}{h} = 3a^2 + 5 + 3ah + h^2 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 5 + 3ah + h^2) \\ = 3a^2 + 5 \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall a \in \mathbb{R}, f'(a) = 3a^2 + 5$.

2. Vérifier en calculant, puis en utilisant, $f'(x)$.

Pour tout réel x , $f(x) = x^3 + 5x$.

Les formules de dérivations donnent immédiatement :

$$f'(x) = 3x^2 + 5$$

donc, $f'(a) = 3(a)^2 + 5 = 3a^2 + 5$.

On retrouve bien le résultat obtenu à la question 1.

Défi Dérivation 10

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

1. Calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.
2. Pour tous a, b et c réels strictement positifs, on note E la moyenne de ces nombres et F l'inverse de la moyenne de leurs inverses, ainsi :

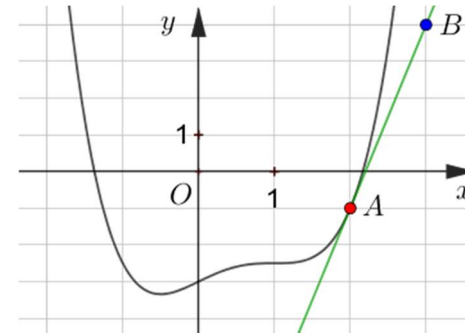
$$E = \frac{a + b + c}{3} \text{ et } F = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Comparer E et F .

Défi Dérivation 11 détermination de deux paramètres

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^4 - x^3 + bx - 3$ où a et b sont deux constantes provisoirement inconnues.

On sait que la courbe représentative (C) de f dans un repère orthogonal passe par $A(2; -1)$ et que la tangente (C) en ce point passe par $B(3; 4)$ comme indiqué sur la figure ci-dessous :



Déterminer les coefficients a et b .

Corrigé

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^4 - x^3 + bx - 3$$

D'une part on sait que : $A(2; -1) \in C$, donc : $f(2) = -1$.

Or, on a : $f(2) = a(2)^4 - (2)^3 + b(2) - 3 = 16a + 2b - 11$,
donc : $16a + 2b - 11 = -1$, autrement dit : $16a + 2b = 10$
ou encore : $8a + b = 5$ (*).

D'autre part, $f'(x_A) =$ coefficient directeur de (AB) , autrement dit :

$$f'(x_A) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\text{Or, } f'(x) = a \times 4x^3 - 3x^2 + b = 4ax^3 - 3x^2 + b$$

$$\text{donc : } f'(x_A) = f'(2) = 4a(2)^3 - 3(2)^2 + b = 32a + b - 12$$

et :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - (-1)}{3 - 2} = \frac{5}{1} = 5$$

donc :

$$32a + b - 12 = 5 \Leftrightarrow 32a + b = 5 + 12 \Leftrightarrow 32a + b = 17 (**)$$

Par soustraction membre à membre de (*) et (**) on obtient :

$$8a + b - (32a + b) = 5 - 17 \Leftrightarrow -24a = -12$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-12}{-24} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Puis en remplaçant par exemple dans (*) :

$$8\left(\frac{1}{2}\right) + b = 5 \Leftrightarrow 4 + b = 5 \Leftrightarrow b = 5 - 4 \Leftrightarrow b = 1$$

Finalement : $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1$.

On en peut en déduire que, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x - 3$$